104016 – פתרונות לבוחן אמצע, אביב תשס"ח, 21/7/08

שאלה מס. 1: (20 נקודות)

תהי"נה נתונות מטריצות A, B, C מעל $\mathbb{R}$ עם-יד:

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad (n\geq 2).$$

אם הוכח ש $(BA)C-(CA)B\in Sp\{B,C\}$, כאשר באגף ימין מתייחסים ל B ו C כוקטורים במרחב המטריצות מסדר $n\times 1$.

ב) תהי D מטריצה סימטרית מ $n\times n$ ותהי E מטריצה $2\times n$ שעמודותיה הן B ו C; העמודה הראשונה היא B והשניה היא C. הוכח שאם $BC^t\neq 0$, אי $DE\neq 0$.

פתרון שאלה מס. 1

הראשית, המכפלות $(BA)C$! $(CA)B$ מוגדרות

וזן מטריצות $1\times n$.

כדי, לפי כללי האסוציאטיבי למכפלה של מטריצות

$$(BA)C = B(AC)$$

מאחר ! AC הינו מטריצה 1×1, לכן $AC = \lambda_1 \in \mathbb{R}$

לכן $(BA)C = \lambda_1 B$ 1)

באופן דומה $(CA)B = C(AB) = \lambda_2 C$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ 2)

מ (1) ! (2) $(BA)C - (CA)B = \lambda_1 B + \lambda_2 C \in Sp\{B, C\}$

לפי תנאי כפל מטריצות $DE = (DB, DC)$

כאשר DB ! DC הן עמודות של DE.

לפי הגדרת מטריצת האפס $1\times n$ $DE = 0$ אם ורק אם

$DB = 0$! $DC = 0$. מאחר ! D הפיכה, לפי משפט $DC = 0$

אם ורק אם $C = 0$ ובאופן דומה $DB = 0$ אם ורק אם $B = 0$.

לכן $DE = 0$ אם ורק אם $C = B = 0$. מהנתון $BC^t \neq 0$. לכן $B \neq 0$

! $C \neq 0$ ולכן $DE \neq 0$.

שאלה מס. 2: (30 נקודות)

תהי V מרחב הפולינומים המתוקנים מדרגה לכל היותר 4 $(V=P_4[x])$,
ויהיו U ו- W תת-מרחבים של V המוגדרים ע"י

$$U=\{p(x)\in V \mid p(1)=p(0)=0\} \quad \text{ו-} \quad W=\{p(x)\in V \mid p(1)=p(-1)\}$$

א. מצא בסיס ל- U.

ב. מצא את $\dim(W)$.

ג. מצא בסיס ל $W\cap U$.

ד. מצא תת-מרחב Z של V, כך ש $W\oplus Z=V$.

פתרון: א. יהי $p(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ פולינום כלשהו ב- V.

U: נדרוש:

$$\begin{cases} p(1)=a+b+c+d+e=0 \\ p(0)=e=0 \end{cases} \qquad r=2 \quad n=5$$

$$\dim(U)=3$$

$$\begin{cases} a=-b-c-d \\ e=0 \end{cases}$$

ומן b,c,d חופשיים, יש:

a	b	c	d	e
-1	1	0	0	0
-1	0	1	0	0
-1	0	0	1	0

$$\boxed{\text{בסיס ל- } U: \{-x^4+x^3,\ -x^4+x^2,\ -x^4+x\}}$$

(3 פולינומים בתנאי שלמדנו $e=0$, $a+b+c+d=0$)

ב) W: נדרוש $p(1)=a+b+c+d+e=a-b+c-d+e=p(-1)$

$$b=-d \qquad r=1 \quad n=5$$

$$\dim(W)=5-1=4$$

ג) נמצא וקטור יסודי ל- W

$$t(x)=ax^4-dx^3+cx^2+dx+e$$

ונבדוק עליו אם הוא ב- U:

$$\begin{cases} t(1)=a-d+c+d+e=0 \\ t(0)=e=0 \end{cases} \qquad a+c=0 \rightarrow a=-c, \quad e=0$$

$$u(x)=\{-cx^4-dx^3+cx^2+dx\}$$

וקטור יסודי למרחב

נבחר בסיס ל- W, ונשלים אותו לבסיס של כל $P_4(x)$.

בקואורדינטות.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן אחרון הוא $(0,0,0,1,0)$ לעומת

כך, שלאחרונה תמונה בתוך.

לכן לעומת $Z=\{ax\}$

שאלה מס' 3: (30 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות הבאה, עם פרמטר ממשי a :

$$\begin{cases} x+(a+3)y+az=a+1 \\ 2x+(a+3)y+2az=2a+1 \\ x+(a+3)y+(a^2+2a-2)z=2a+3 \end{cases}$$

א. לאילו ערכים של a אין למערכת פתרון?

ב. לאילו ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד?

ג. לאילו ערכים של a יש למערכת אינסוף פתרונות?

ד. לכל ערך של a עבורו יש למערכת אינסוף פתרונות, רשום את הפתרון הכללי של המערכת.

נדרג את המט' המורחבת:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+3 & a & a+1 \\ 2 & a+3 & 2a & 2a+1 \\ 1 & a+3 & a^2+2a-2 & 2a+3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+3 & a & a+1 \\ 0 & -a-3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a^2+a-2 & a+2 \end{array}\right)$$

המט' המורחבת מדורגת לכל $a^2+a-2\neq 0$ ו- $-a-3\neq 0$.

א) אין פתרון $\Leftrightarrow r(A^*)\neq r(A) \Leftrightarrow -a-3=0$ או $\begin{cases}(a+2)(a-1)=0\\ a+2\neq 0\end{cases}$ $\begin{cases}a^2+a-2=0\\ a+2\neq 0\end{cases}$

כלומר $\Leftrightarrow \boxed{a=-3 \text{ או } a=1}$

ב) פתרון יחיד $\Leftrightarrow r(A^*)=r(A)=n=3$ (n=מס. הנעלמים)

$\Leftrightarrow \begin{cases}(a+2)(a-1)\neq 0\\ a+3\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{a\neq -3,-2,1}$

ג) אינסוף פתרונות $\Leftrightarrow r(A^*)=r(A)<n=3 \Leftrightarrow \boxed{a=-2}$

ד) לגבי $a=1$ המערכת:

$$\begin{cases} x+y-2z=-1 \\ y=1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

והי z חופשי נקבל $x=-1-1+2z$

$$\{(-2+2z,1,z) \mid z\in\mathbb{C}\}$$

א. $\boxed{a=-3 \text{ או } a=1}$	ב. $\boxed{a\neq -3,-2,1}$
ד. $\boxed{a=-2}$	ג. $\boxed{\{-2+2z,1,z\}}$ (או $\{x,1,\frac{x}{2}+1\}$)

שאלה מס. 4: (20 נקודות)

א) יהי $z\neq 0$ מספר מרוכב כלשהו, ויהי $w=\bar{z}^{2008}\cdot(7-i)^{2009}+t\cdot z^{2008}\cdot(7+i)^{2009}$,

כש- t הוא פרמטר ממשי. חשבו את כל הערכים של t עבורם w ממשי.

ב) תהי S קבוצת כל הווקטורים ב- $\mathbb{R}^5$ שיש להם אפסים במספרמקומות רביעים.

האם S הוא תת- מרחב של $\mathbb{R}^5$? אם כן - הוכח, ואם לא - הבא דוגמא נגדית

מספרית לפריטה (אי סיומה) בהבדרת מרחב וקטורי שאינך מתקיימת.

ג) הוכח או הפרך את הטענה הבאה:

המטריצה הממשית $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ a & b\end{pmatrix}$ שקולת שורות ל- A^t אם ורק אם $a=b=1$.

ד) תהי A מטריצה ריבועית $n\times n$ ($n\geq 2$) מעל $\mathbb{R}$.

הוכח שאם $A\neq A^t$ אבל A ו- A^t תלויות לינארית מעל $\mathbb{R}$, אז A היא

מטריצה אנטי-סימטרית.

האם התוצאה תקפה בכוונך גם מעל $\mathbb{C}$?

בתרגיל שאלה מס. 4

א. נסמן $u = z^{2008}(z+i)^{2009}$ ויהי $W = \bar{u} + tu$. נניח $u \notin \mathbb{R}$.

כדי ש $W \in \mathbb{R}$ אם ורק אם $W = \bar{W}$, כלומר

$$\bar{u} + tu = t\bar{u} + u.$$

לכן W ממשי אם ~~ם~~ $(t-1)(u-\bar{u}) = 0$

לפי הנתון $u \notin \mathbb{R}$ ולכן $u - \bar{u} \neq 0$. לכן W ממשי אם

ורק אם $t=1$. נניח כעת $u \in \mathbb{R}$. אזי W ממשי לכל הערכים של t.

ב. לוקלו הוכס מספר ~~הרכיבים הלא~~ הרכיבים המדומים לאופס

הוא 5 - בלתי זוגי. לכן הארכיטקטורה בלבד קיים אומרת כי

לו מתקיימת.

ג. **לא**: אם $a \neq b$ אזי A הפיכה ולכן A^t הפיכה. ושניהן

שקולות שורות ל $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

מאחר ! $A \neq 0$ גם $A^t \neq 0$

ד. ונניח להיות ש $A^t = cA$, כאשר $c \in \mathbb{R}$. לכן

$$A = (A^t)^t = (cA)^t = cA^t = c(cA) = c^2 A$$

כלומר $(c^2-1)A = 0$

$A \neq 0$ (כי $A \neq A^t$ ~~ש~~ $A = 0$ אזי $A^t = A = 0$). לכן $c^2 - 1 = 0$

למשוואה $c^2-1=0$ יש בדיוק 2 פתרונות (± 1) אבל ב $\mathbb{R}$ ואולם

גם הפתרונות ב $\mathbb{C}$, כי לפי משפט היסודי של האלגברה למשוואה

ריבועית בדיוק 2 שורשים (עם ריבוי)

לכן $A=A^t$ או $A=-A^t$. לפי הנתון $A\neq A^t$ ולכן $A=-A^t$

! A היא אנטי סימטרית.